

אקוונומטריקה

פרק 7 - המודל הריבועי

תוכן העניינים

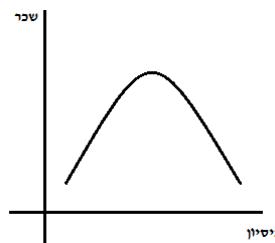
1. רשימת סרטוניים

המודל הריבועי

רקע:

משמש עבור משתנים שתרומותם לניבוי המשתנה תלוי איננה ליניארית אלא פרבוליית עם נקודת מינימום או מקסימום.

למשל:



מודל הרגressive הריבועית מניח כי בשלב מסוים התרומה השולית משנה את סימנה (מחזובי לשיליי או משלילי לחזובי).

המודל הריבועי : $Y_i = \alpha + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + u_i$

התרומה השולית של X בণיבו Y : $\frac{dy}{dx} = \beta_1 + 2\beta_2 X_i$

התרומה השולית במקרה זה אינה קבועה אלא תלולה ב-X.

הנגזרת מתאפסת בנקודת : $X^* = -\frac{\beta_1}{2\beta_2}$

אם $\beta_2 > 0$, המקדם של X^2 הוא **חיובי** : מדובר בנקודת מינימום שעד אליה התרומה השולית שלילית וממנה ואילך חיובית.

אם $\beta_2 < 0$, המקדם של X^2 הוא **שלילי** : מדובר בנקודת מקסימום שעד אליה התרומה השולית חיובית וממנה ואילך שלילית.

שאלות:

- 1)** במחקר על השפעת הגיל על מספר הדקות שפרט משוחח בטלפון הניד נאמד המודל הבא : $Y_i = \beta_0 + \beta_1 A_i + \beta_2 A_i^2 + u_i$.

מה צריכים להיות סימני המקדים שייתנו את התוצאה הבאה :
בגילאים מבוגרים ובגילאים צעירים מדברים יותר מאשר בגילאי הביניים?

- 2)** חוקר החליט לשווות בין שני מודלים :
מודל רגרסיה פשוטה של X = הוצאות פרסום (באלפי שקלים לשנה)
על Y = ציון לחזק המותג (בציוון 0-10).
מודל רגרסיה מרובה הכולל בנוסף את המשתנה X^2 = הוצאה עבור פרסום
בריבוע.

א. תארו את המודל באופן אלגברי.

להלן תוצאות האמידה של המודלים על סמך מדגם של 33 חברות :

$$1. \quad R^2 = 0.4676, \quad S_{\hat{\beta}} = 0.097, \quad \hat{Y}_i = 22.163 + 0.363X_i$$

$$2. \quad R^2 = 0.53, \quad \hat{Y}_i = 7.059 + 1.085X_i - 0.004X_i^2, \quad S_{\hat{\beta}_1} = 0.37, \quad S_{\hat{\beta}_2} = 0.002$$

ב. מהו גודל השינוי השולי בכל אחד מהמודלים?
אמדו את גודלו והסבירו את משמעותו.

- ג. איזה מודל עדיף? מהם המבחנים הסטטיסטיים המתאימים? בצעו אותם.
ד. בדקו האם לאחר רמת הוצאה מסוימת כבר לא משתלם לפרסום.

- 3)** ב כדי לאמוד את הקשר בין הישגים של תלמידים שסיימו את בית הספר התיכון באמצעות ציון של מבחן כניסה לאוניברסיטה (G שנדד בנקודות) לגודל בית הספר (HS שנדד במסאות תלמידים) נאמד מודל ריבועי על בסיס מדגם של 400 תלמידים מתוך כלל התלמידים שניגשו לבחינת הכניסה.
להלן המשווהה הנאמדת (סטודנט התקן נתונות בסוגרים) :

$$R^2 = 0.076, \quad \hat{G} = 997.8 + 19.81HS - 2.13HS^2, \quad (6.20) \quad (0.55) \quad (3.99)$$

א. הסבירו את המשמעות של המודל הריבועי (לזה את תשובה בחישוב של הגודל האופטימאלי של בית הספר ובתיאור גרפי של המודל).

ב. מה יהיה השינוי במבחן בין תלמיד שלמד בבית ספר עם 300 תלמידים לבין תלמיד שלמד בבית ספר עם 330 תלמידים?

ג. מה יהיה הגודל האופטימאלי של בית הספר בהנחה שהמשנה HS נמדד בעשרות תלמידים ולא במסאות תלמידים?

ד. האם מספר התלמידים בריבוע תורם להסביר של המודל? נסח את ההשערה ובודק אותה.

ה. הועלתה הטענה כי המודל איננו מצליח כלל להסביר את התנהלות הציונים במהלך. נסח את ההשערה המתאימה ובודק אותה.

תשובות סופיות:

$$\text{(1)} \quad \beta_1 < 0 ; \beta_2 > 0 .$$

(2) א. המודל הליניארי פשוט: $. Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$.

המודל הריבועי: $. Y_i + \alpha + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + u_i$

ב. 1. גודל השינוי הוא β , האומד הינו: $b = 0.363$

2. גודל השינוי הוא: $. 1.085 - 0.008 \cdot X_i$, האומד הינו: $\beta_1 + 2\beta_2 X_i$

ג. המודל הריבועי עדיף עפ"י מבחנים t ו-WALD.

ד. בשלב מסוים השינוי השולי הופך מחיובי לשיליי.

(3) א. ראה סרטון.

ב. השינוי יהיה: $1.278 - 1.278 \cdot 1$ נקודות.

$$\text{ג. } X^* = 46.5 .$$

ד. כן.

ה. יש עדות לכך.